PETRE NĂCHILĂ CĂTĂLIN EUGEN NĂCHILĂ

TRIGONOMETRIE PENTRU TOȚI

CLASELE a IX-a – a X-a

Editura NOMINA

Cuprins

Capitolul 4. APLICAȚIILE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

Capitolul 5. FUNCȚIILE CIRCULARE INVERSE. ECUAȚII TRIGONOMETRICE

Capitolul 1
UNGHIURI ŞI ARCE

1.1. Măsurarea unghiurilor şi arcelor. Cercul trigonometric

Se consideră cercul $\mathscr{C}(O, R)$ şi un punct fix A pe cerc. Pornind din punctul A, se împarte cercul în 360 părţi egale. Fiecare sector de cerc determinat de două puncte consecutive ale acestei diviziuni formează un unghi la centru de 1° (un grad sexagesimal), care este şi măsura arcului delimitat de cele două puncte. Semicercul are deci 180°, iar cercul are 360°. Dacă se împarte cercul în 400 de părţi egale vom avea gradele centesimale. Submultiplii:

$1° = 60 \text{ min} = 60'$; $\quad 1^{\min} = 1' = 60 \text{ s } (60'')$.

$1° = 100^c$ (100 minute centesimale); $\quad 1^c = 100^{cc}$ (secunde centesimale)

Se numeşte radian (notat *rad*), măsura unghiului la centru care corespunde unui arc de lungime R (în cercul de rază R). Lungimea cercului este $2\pi R$.

Relaţia prin care se trece de la o măsură la alta este:

$$\frac{n^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha^g}{200^g} = \frac{a}{\pi}.$$

Avem $1 \text{ rad} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57°14'$; $\quad 1^g = \dfrac{\pi}{180} \text{ rad}$; $\pi(\text{rad}) = 180° = 200^g$.

Este util de reţinut următoarele corespondenţe:

măsura în grade	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
măsura în radiani	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

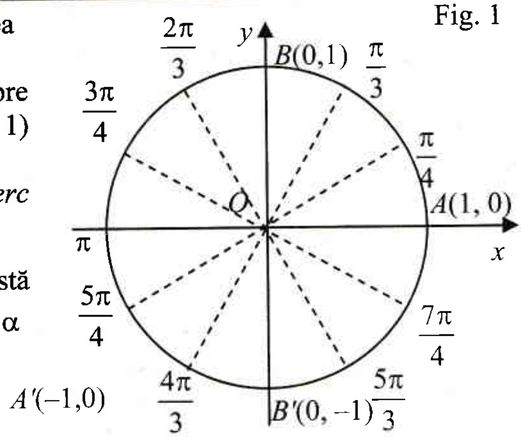
Considerăm cercul de centru O (originea sistemului axelor de coordonate) şi rază 1.

Cercul poate fi parcurs de la $A(1, 0)$ spre $B(0, 1)$ (sens pozitiv – trigonometric) (fig. 1) sau de la A spre $B'(0, -1)$ (sens negativ).

Cercul definit mai sus se numeşte *cerc trigonometric*.

Teoremă. Pentru orice număr real t, există $k \in \mathbb{Z}$ şi $\alpha \in [0, 2\pi]$, astfel încât $t = 2k\pi + \alpha$ (se ia $k = \left[\dfrac{t}{2\pi}\right]$, $\alpha = \left\{\dfrac{t}{2\pi}\right\} \cdot 2\pi$.

Fig. 1



Dacă $t \in [0, 2\pi]$, numărului t i se asociază punctul $M_t \in \Gamma$ astfel încât arcul orientat $\overset{\frown}{AM_t}$ are lungimea t.

Dacă $t \notin [0, 2\pi]$, luând $t = 2k\pi + \alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, atunci numărului t i se asociază punctul $M_t \in \Gamma$ astfel încât arcul orientat $\overset{\frown}{AM_t}$ are lungimea α.

S-a definit astfel *funcţia de acoperire universală* $f: \mathbb{R} \to \Gamma, f(x) = M_t$.

Teoremă. Funcţia de acoperire universală are perioada principală 2π (perioadele ei sunt de forma $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$).

Avem $f(2k\pi) = A$; $f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = B$; $f(2k\pi + \pi) = A'$; $f\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = B'$.

Observaţii:

1) Interioarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOA'$, $\sphericalangle A'OB'$, $\sphericalangle B'OA$ se numesc *cadranele I, II, III*, respectiv *IV*.

2) Deoarece raportul dintre lungimea unui cerc şi raza sa este acelaşi (2π) pentru toate cercurile, considerăm un arc de cerc de măsură $n°$, unde $0 \le n \le 360°$, raportul dintre lungimea arcului şi raza cercului este $\frac{n\pi}{180}$ şi deci nu depinde de cerc, ci doar de măsura arcului.

3) Numărul π este număr iraţional şi $\pi \approx 3{,}14159$.

4) Unghiul de 1 rad are valoarea aproximativă de $57°14'$.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Două mobile A şi B pleacă în acelaşi moment, deplasându-se în acelaşi sens, din două puncte diametral opuse situate pe acelaşi cerc. Mobilul A descrie în fiecare minut un arc de $30°$, iar al doilea mobil un arc de $60°$. După cât timp se produce a n-a întâlnire a celor două mobile, unde $n \in \mathbb{N}^*$?

Soluţie: Se aplică legea spaţiului $\alpha = \omega t$ în mişcarea circulară şi uniformă în care $\omega = \frac{2\pi}{T}$ este viteza unghiulară. Fie t_1 timpul după care se produce prima întâlnire. Avem $\alpha_1 - \alpha_2 = (\omega_1 - - \omega_2)t_1$ şi deci $t_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}} = 6$ minute. Presupunând că mobilul A stă pe loc, mobilul B are de parcurs spaţiul π cu viteza $V_2 - V_1 = \frac{\pi}{6}$ şi deci $t_1 = 6$ minute. Timpii după prima, a doua, a treia întâlnire, ..., a n-a întâlnire sunt respectiv t_1, $t_1 + t_2$, $t_1 + 2t_2$, ..., respectiv $t_1 + (n - 1)t_2$, unde $t_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}} = 12$ minute.

Obţinem $t_n = 6 + 12(n - 1) = 12n - 6$.

PROBLEME PROPUSE

1. Completaţi următorul tabel, în care sunt date măsurile unor unghiuri în:

grade sexazecimale				$36°$	$40°$	$67°30'$					$330°$	$450°$	$480°$
grade centesimale	250	$\frac{800}{3}$	300										
radiani							$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{15\pi}{8}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{15}$			

2. Reprezentaţi pe cercul trigonometric, punctele corespunzătoare unghiurilor de $60°$; $240°$; $330°$; $-45°$; $-135°$; $750°$; $1140°$; $-2355°$; $-15000°$.

3. Reprezentaţi pe cercul trigonometric punctele corespunzătoare unghiurilor de măsuri: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{-11\pi}{6}$, $\frac{-11\pi}{4}$, $\frac{-15\pi}{2}$, $\frac{-103\pi}{4}$, $\frac{250\pi}{3}$.

4. Fie punctele $A, B \in \mathcal{C}(0, 8)$, astfel încât lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ este:

a) 2; b) 4; c) 6; d) 8; e) 16; f) 20; g) 24.

Determinaţi $m(\sphericalangle AOB)$ (măsura în grade sexagesimale) şi $\mu(\sphericalangle AOB)$ (măsura în radiani) pentru unghiul $\sphericalangle AOB$.

5. Se consideră un cerc de rază 12. Calculaţi lungimile arcelor subîntinse de unghiurile la centru de măsură:

a) $75°$; b) $210°$; c) $315°$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\frac{7\pi}{18}$; f) $\frac{5\pi}{4}$; g) $\frac{5\pi}{3}$.

6. În ce cadran se află punctele corespunzătoare unghiurilor având măsura:

a) $2\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $-2\sqrt{2}$; d) $-3\sqrt{3}$?

7. Acelaşi enunţ ca la **6** pentru unghiurile de măsuri:

a) $230°$; b) $-470°$; c) $-2900°$; d) $\frac{5\pi}{11}$; e) $-\frac{7\pi}{3}$; f) $-\frac{1408\pi}{9}$.

8. O roată de transmisie se roteşte cu viteza unghiulară $\omega = \frac{5\pi}{12}$ rad/s (unde $\omega = \frac{2\pi}{t}$, t = timpul). În cât timp roata execută:

a) o rotaţie completă; b) 6 rotaţii complete; c) 24 rotaţii complete?

9. Două mobile A şi B pleacă în acelaşi moment, deplasându-se în acelaşi sens, din două puncte diametral opuse situate pe acelaşi cerc parcurgând în fiecare minut un arc de $30°$, respectiv un arc de $60°$. După cât timp se produce prima, a doua, respectiv a n-a întâlnire ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$)?

10. Aceleaşi date ca la problema **9**, dar mobilele deplasându-se în sensuri opuse.

11. Două mobile pleacă în acelaşi moment din acelaşi punct şi se deplasează pe acelaşi cerc descriind în fiecare minut un arc de $15°$, respectiv $30°$. După cât timp se produce prima, respectiv a doua întâlnire a celor două mobile?

12. Două mobile pleacă în acelaşi moment din două puncte diametral opuse ale unui cerc, având vitezele unghiulare de $\frac{\pi}{12}$ rad/min, respectiv $\frac{\pi}{4}$ rad/min. După cât timp se produce prima, a treia, respectiv a n-a întâlnire a mobilelor dacă merg:

a) în acelaşi sens; b) în sensuri opuse?

13. Fie funcţia $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = \begin{cases} -2000, & x = \text{par} \\ 2000, & x = \text{impar} \end{cases}$. Demonstraţi că f este periodică având perioada principală $T_0 = 2$.

14. Fie funcţia lui Dirichlet, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$. Demonstraţi că orice $T \in \mathbb{Q}$ este perioadă a lui f şi că f nu are perioadă principală.

15. Să se studieze periodicitatea funcţiilor parte întreagă: $f(x) = [x], f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, şi a funcţiei parte fracţionară: $f(x) = \{x\}, f: \mathbb{R} \to [0, 1)$.

16. Să se studieze periodicitatea funcţiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2[x] - [2x]$; b) $f(x) = 3[x] - [3x]$.

17. Demonstraţi că funcţiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x + 1$; b) $f(x) = -x^2 + 2$, nu sunt periodice.

18. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite drept perioadă orice număr iraţional. Arătaţi că f este constantă.

19. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{1\}$ cu proprietatea că: $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $T = 4$ este perioadă a lui f.

20. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{1\}$ astfel încât $f(x+1) = \frac{1}{1-f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $T = 3$ este perioadă a lui f.

21. Fie $f: \mathbb{R} \to \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ cu proprietatea că $f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că f are perioada 2.

22. Fie $a \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$. Arătaţi că punctele de pe cercul trigonometric care sunt extremităţi ale arcelor de lungimi $a, a + \frac{\pi}{3}, a + \frac{2\pi}{3}, a + \pi, a + \frac{4\pi}{3}, a + \frac{5\pi}{3}$ sunt vârfurile unui hexagon regulat.

1.2. Generalizarea noţiunii de unghi şi a noţiunii de arc

Într-un plan se disting două sensuri pentru rotația unei semidrepte:
– sensul pozitiv – sensul invers rotației acelor de ceas (+);
– sensul negativ – ceasul rotației acelor de ceas (–).
Sensul de rotaţie este indicat prin săgeată (figura 2).

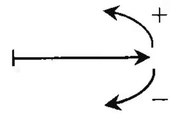


Fig. 2

Planul orientat este planul în care s-a stabilit sensul pozitiv pentru rotație.

Unghiul orientat AOB este descris (generat) de o semidreaptă care se rotește în jurul originii sale O din poziția indicată $[OA$ până în poziția finală $[OB$.

Semidreptele $[OA$ și $[OB$ se numesc *laturile unghiului.*

Convenim să numim unghiul AOB pozitiv sau negativ după cum sensul rotației care îl generează este pozitiv sau negativ.

Dacă măsura unghiului geometric AOB este α, atunci măsura unghiului AOB este α sau $-\alpha$.

Dacă semidreapta $[OA$ care a descris unghiul AOB a efectuat n rotații pozitive ($n \in \in \mathbb{N}$), măsura unghiului AOB este $\alpha + 360° \cdot n$, iar dacă rotațiile sunt negative, măsura unghiului AOB este $\alpha - 360° \cdot n$.

Definiţie. Două unghiuri cu aceeași mărime se numesc *congruente*.

Măsura unui unghi, fiind independentă față de poziția laturii inițiale, rezultă că orice semidreaptă din planul orientat poate fi considerată ca latură inițială a unui unghi.

Fie semidreapta $[OA$ din planul orientat, care se rotește în poziția $[OB$. Fie M un punct al semidreptei $(OA$. Punctul M descrie un drum numit *arc*. Avem arcul $\overset{\frown}{MN}$ (pentru rotația în sens pozitiv) și arcul $\overset{\frown}{MN'}$ (pentru rotația în sens negativ). Prin mărimea arcului $\overset{\frown}{MN}$ înțelegem măsura unghiului corespunzător MON.

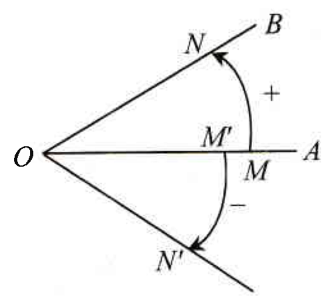


Fig. 3

PROBLEME PROPUSE

1. Două mobile aflate pe un cerc în punctele diametral opuse A, B se deplasează pe cerc, descriind în fiecare minut un arc de 30°, respectiv 45°. După cât timp se produce prima, a treia, respectiv a patra întâlnire?

2. Două mobile se află pe un cerc în punctele A, B, astfel încât ??. Cele două mobile descriu în fiecare minut un arc de +30°, respectiv de –15°. După cât timp se produce prima, a patra, respectiv a n-a întâlnire?

Capitolul 2
TRIGONOMETRIE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

2.1. Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic (funcțiile trigonometrice sin, cos, tg, ctg)

Fie triunghiul dreptunghic ABC (m($\sphericalangle A$) = 90°). Notăm $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, m($\sphericalangle B$) = x, m($\sphericalangle C$) = y. Se definesc funcţiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă, cotangentă, secantă şi cosecantă, astfel:

$\sin x = \frac{b}{a} = \cos y$; $\cos x = \frac{c}{a} = \sin y$;

$\operatorname{tg} x = \frac{b}{c} = \operatorname{ctg} y$; $\operatorname{ctg} x = \frac{c}{b} = \operatorname{tg} y$;

$\sec x = \frac{a}{c} = \operatorname{cosec} y$; $\sec y = \frac{a}{b} = \operatorname{cosec} x$.

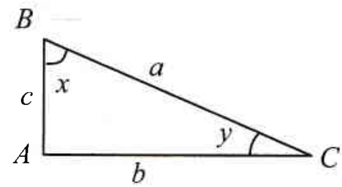


Fig. 1

Observaţii:

1) Deoarece $0 < b < a$, $0 < c < a$, avem $\sin x \in (0, 1)$, $\cos x \in (0, 1)$, $\sec x > 1$, $\operatorname{cosec} x > 1$.

2) Deoarece $x + y = 90°$, avem:

$\sin x = \cos(90° - x)$; $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(90° - x)$;

$\cos x = \sin(90° - x)$; $\operatorname{cosec} x = \sec(90° - x)$;

$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(90° - x)$; $\sec x = \operatorname{cosec}(90° - x)$.

3) Deoarece $b^2 + c^2 = a^2$, rezultă că:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sec x = \frac{1}{\cos x}$; $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$;

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$; $\frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} = 1$;

$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$.

4) A rezolva un triunghi dreptunghic înseamnă a-i determina măsurile tuturor elementelor sale (unghiuri şi laturi). Principalele cazuri de rezolvare a triunghiului dreptunghic sunt cele în care se cunosc:

i) ipotenuza şi un unghi ascuţit;
ii) ipotenuza şi o catetă;
iii) cele două catete;
iv) o catetă şi un unghi ascuţit.

Se observă că în cazurile i), ii), iv) apar câte două subcazuri analoage.

PROBLEME REZOLVATE

1. Demonstraţi că în orice triunghi ABC dreptunghic în A avem:

$$\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{2(b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

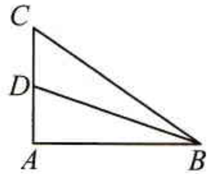


Fig. 2

Soluţie. Fie $[AD$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ (figura 2). Din teorema bisectoarei avem: $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AB}{BC}$ şi atunci $\dfrac{AD}{AD+DC}=$ $=\dfrac{AB}{AB+BC}$, de unde $AD=\dfrac{bc}{a+c}$. Rezultă că $\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{AD}{BD}=$

$$=\frac{AD}{\sqrt{AB^2+AD^2}}=\frac{AD}{\sqrt{c^2+\frac{b^2c^2}{(a+c)^2}}}=\frac{b}{\sqrt{(a+c)^2+b^2}}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2+2ac}}=$$

$=\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{2a^2+2ac}}=\sqrt{\dfrac{a-c}{2a}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{c}{a}}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\cos B}{2}}$. Analog se arată că $\sqrt{\dfrac{1+\cos B}{2}}=$

$=\sqrt{\dfrac{a+c}{2a}}=\dfrac{AB}{AD}=\cos\dfrac{B}{2}$. Rezultă că $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\sqrt{\dfrac{a-c}{a+c}}$, $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos C}{1+\cos C}}=$

$=\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$ şi deci $\operatorname{tg}^2\dfrac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{a-c}{a+c}+\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{2(a^2-bc)}{(a+b)(a+c)}=$

$\dfrac{2(b^2+c^2-bc)(b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}=\dfrac{2(b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

2. Demonstraţi că în orice triunghi dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90°$ avem $\sin B+\cos B=\dfrac{p+r}{p-r}$, unde p este semiperimetrul, iar r este raza cercului înscris.

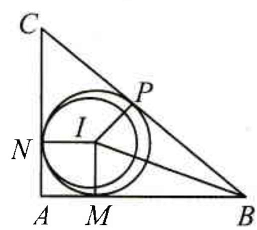


Fig. 3

Soluţie. Fie I centrul cercului înscris şi M, N, P punctele de tangenţă cu laturile (AB), (AC), (BC) (figura 3). Avem $AM=$ $=AN=x$, $BM=BP=y$, $CN=CP=z$. Rezultă că $x+y=c$, $y+z=a$, $x+z=b$. Cum $2p=a+b+c=2(x+y+z)$, rezultă că $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$. Patrulaterul $AMIN$ are trei unghiuri drepte în A, M, N şi cum $MI=NI$, rezultă că $AMIN$ este pătrat cu latura $AM=r=p-a$. Avem $\dfrac{p+r}{p-r}=\dfrac{2p-a}{a}=$

$=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}=\sin B+\cos B.$

PROBLEME PROPUSE

1. Determinaţi valorile funcţiilor trigonometrice ale unghiurilor de 30°, 45°, 60°.

2. Să se completeze tabelul următor ştiind că $x \in (0°,90°)$:

$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\sec x$	$\operatorname{cosec} x$
$\frac{3}{5}$					
	$\frac{5}{13}$				
		$2-\sqrt{3}$			
			$2-\sqrt{3}$		
				$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	
					$\frac{13}{5}$

3. Rezolvaţi triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$) în cazurile:

a) $a = 20$, $m(\sphericalangle B) = 30°$;

b) $b = 8$; $m(\sphericalangle C) = 45°$;

c) $b = 6$; $c = 6\sqrt{3}$;

d) $a = 16$; $c = 8\sqrt{2}$;

e) $a = 10$; $b + c = 14$;

f) $a + b + c = 18+6\sqrt{3}$; $m(\sphericalangle C) = 60°$.

g) $b + c = 18$; $\operatorname{ctg} B = 4\sin^2 C$.

4. Demonstraţi că într-un triunghi dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$) avem:

a) $b\sin C + c\sin B = 2a\sin B\sin C$;

b) $\frac{b^2}{\operatorname{tg} B} + \frac{c^2}{\operatorname{tg} C} = 4S$;

c) $\frac{\sin B + \cos C}{\sin C + \cos B} = \operatorname{ctg} C$;

d) $\operatorname{ctg} B + \operatorname{cosec} B = \frac{a+c}{b}$;

e) $\sin C \cdot \operatorname{tg} C = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$;

f) $\frac{1}{2\sin B\sin C} = \frac{c\cos B + b\cos C}{c\sin B + b\sin C}$;

g) $\sqrt{\frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}} = \frac{a^2}{b\cdot c}$;

h) $\cos^2 B(\operatorname{tg} B + \operatorname{ctg} B) = \operatorname{ctg} B$.

i) $\operatorname{tg}^2 C + \cos^2 C = \operatorname{tg}^2 C\sin^2 C + 1$;

j) $(1 + \sin B)(1 + \cos B) = \frac{2p^2}{a^2}$;

k) $\frac{\cos B - \cos C}{p-a} = \frac{\sin C}{p-c} - \frac{\sin B}{p-b}$;

l) $\frac{1-\cos B}{1+\cos B} + \frac{1-\cos C}{1+\cos C} = \frac{2(b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

5. Demonstraţi că pentru orice $x \in (0°, 90°)$ avem:

a) $\frac{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x} = \operatorname{tg}^6 x$;

b) $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} + \frac{1+\operatorname{ctg} x}{1-\operatorname{ctg} x} = 0$;

c) $\sin x + \cos x = \dfrac{1+\operatorname{tg} x}{\sec x}$;　　d) $\dfrac{1+\sin^2 x}{2+\operatorname{ctg}^2 x} + \dfrac{1+\cos^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x} = 1$;

e) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$;　　f) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x} - \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = 2\operatorname{ctg} x$;

g) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \dfrac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$;　　h) $\operatorname{ctg}^2 x \cdot \cos^2 x = \operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x$.

Observaţie: Se subînţelege că se consideră toate valorile lui x pentru care expresiile au sens. De exemplu, la b) se ia $x \neq 45°$.

6. Folosind teorema bisectoarei (într-un triunghi dreptunghic) demonstraţi că pentru orice $x \in (0°, 90°)$, avem:

$\sin\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$;　$\cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$;　$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$;　$\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$.

7. Demonstraţi că:

$\sin 15° = \cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;　　$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{ctg} 75° = 2-\sqrt{3}$;

$\sin 75° = \cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;　　$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{ctg} 15° = 2+\sqrt{3}$.

8. Determinaţi valorile funcţiilor trigonometrice ale unghiurilor de 22°30' şi 67°30'.

9. Demonstraţi că pentru orice $x \in (0°, 90°)$ avem:

a) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$;　　b) $\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$;

c) $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$;　　d) $\cos x = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2} = 2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1$.

10. Demonstraţi că pentru orice $x \in (0°, 90°)$ următoarele expresii reprezintă nişte constante:

a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$;　　b) $\sin^4 x - \sin^2 x - (\cos^4 x - \cos^2 x)$;

c) $\dfrac{\sin^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x}$;　　d) $\dfrac{\cos^2 x(1+\operatorname{ctg}^2 x)}{\operatorname{ctg}^2 x}$;

e) $3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\cos^6 x + \sin^6 x)$;　f) $\dfrac{1+\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x}{(1+\cos x)(1+\operatorname{tg} x)}$;

g) $\operatorname{ctg} x\left(\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}} - \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)$;　　h) $\dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} - \operatorname{tg}^6 x$;

i) $\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \left[\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x(1+\sin^2 x)}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x(1+\cos^2 x)}}\right]$.

11. Demonstraţi că pentru orice $x \in (0°, 90°)$ avem:

a) $2\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) \geq 1$;

b) $4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) \geq 1$;

c) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2$;

d) $\left(2 + \dfrac{1}{\sin x}\right)\left(1 + \dfrac{2}{\cos x}\right) \geq 11$.

12. Ştiind că $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{2}{5}$, $x \in (0°, 45°)$, calculaţi $S_n = \sin^{2n} x + \cos^{2n} x$, $n \in \mathbb{N}^*$.

13. Demonstraţi că pentru orice $x \in (0°, 90°)$ avem:

a) $\sin^n x + \cos^m x < 1$, $m, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$;

b) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$;

c) $\dfrac{2}{\operatorname{tg} x - 1} < \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} < \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1}$; $x \neq 45°$;

d) $\sec^4 x + \operatorname{cosec}^4 x \geq 8$;

e) $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} \geq 2\sqrt{2}$;

f) $\left(1 + \dfrac{a}{\sin x}\right)\left(1 + \dfrac{b}{\cos x}\right) \geq \left(1 + 2\sqrt{ab}\right)^2$, $a > 0$, $b > 0$.

14. Demonstraţi că următoarele expresii sunt independente de $x \in (0°, 90°)$:

a) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} + \dfrac{1 + \operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{ctg} x}$;

b) $\operatorname{tg}^2 x : \dfrac{1 + \operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x}$;

c) $\operatorname{ctg}^4 x \cdot \dfrac{\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}^4 x} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^4 x}}{\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}^4 x} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^4 x}}$;

d) $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)(\cos x - \sec x)(\sin x - \operatorname{cosec} x)$;

e) $\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x} - \sqrt{2(1 + \cos x)}$;

f) $\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x} - \sqrt{2(1 + \sin x)}$.

15. Determinaţi măsurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic în A ştiind că $a + b = 3c$.

16. Rezolvaţi triunghiul dreptunghic în A ştiind că $m(\sphericalangle C) = 22°30'$ şi $a - b = 10$.

17. Demonstraţi că în orice triunghi dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$) avem:

a) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}} - \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}} = 1$;

b) $\sin^2 \dfrac{B}{2} + \sin^2 \dfrac{C}{2} + \dfrac{r}{a} = \dfrac{1}{2}$;

c) $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{p}$;

d) $2R + r = p$,

unde r este raza cercului înscris, iar R este raza cercului circumscris.